PROBABILIDAD

Algunos conceptos introductorios:

- Un fenómeno es **determinístico** si se sabe con toda certeza cuál será su comportamiento.
- Un fenómeno es **aleatorio** cuando no podemos afirmar con certeza cuál será su comportamiento.

Por ejemplo: Si lanzamos una piedra al aire, podemos afirmar con certeza que volverá a caer a la superficie de la tierra, pero no podemos saber con precisión el punto en el cual caerá. Así, la caía es un fenómeno determinístico, mientras que el lugar en el que se producirá dicha caída es aleatorio, ya que existe incertidumbre respecto del punto preciso en el que caerá.

- La estadística utiliza la probabilidad como herramienta.
- Utilizan cosas similares que las llaman de diferente manera…

Estadística	**Probabilidad**
Variable de Estudio	Variable Aleatoria
Espacio de variabilidad	Espacio muestral
Clase	Suceso o Evento
Distribución de frecuencias	Distribución teórica de probabilidad

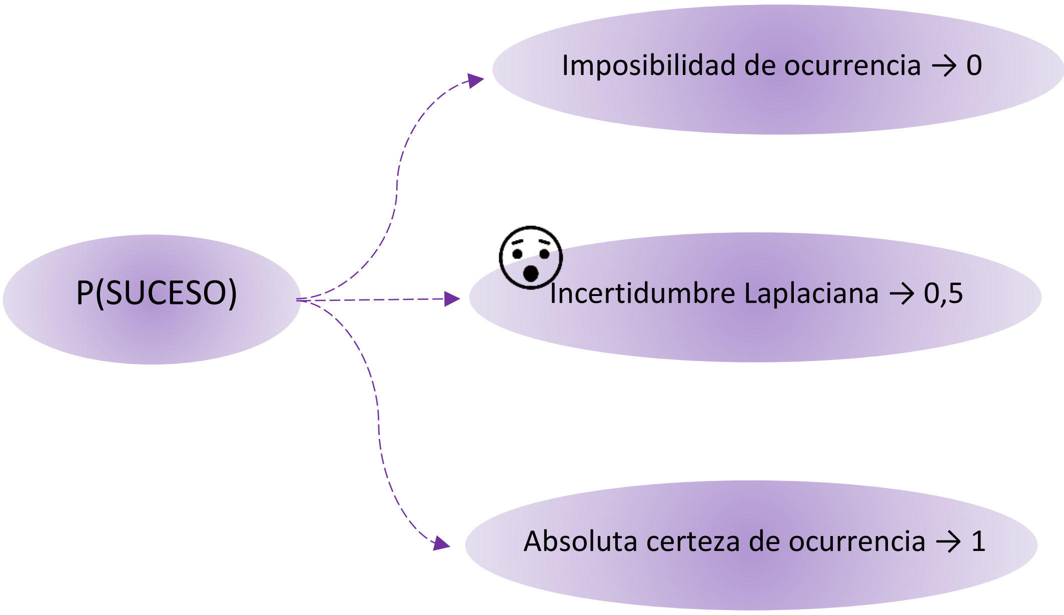
Ejemplo: Tiro un dado 60 veces. No siempre va a pasar que vaya a caer 10 veces en 1, 10 veces en 2, 10 veces en 3, 10 veces en 4 y así sucesivamente, pero si ese experimento lo repito infinitas veces y las promedio se va a acercar mucho a que 10 veces haya caído el 1, 10 veces el 2, 10 veces el 3…
A eso lo voy a poder saber después de realizar infinitas veces el experimento (ex-post). También podemos saber, conociendo las características físicas del dado, que si lo tiramos infinitas veces 1/6 de las veces va a caer el 1, 1/6 de las veces va a caer el 2, y así sucesivamente.

- Al cálculo probabilístico le interesa el comportamiento que van a tener los distintos eventos que pertenecen al espacio muestral de una determinada variable aleatoria.

Definición de probabilidad.

La primera definición de probabilidad fue como la posibilidad de ocurrencia de un evento. El tema fue que esta era una definición recursiva.

Por este motivo posteriormente se la definió a la probabilidad como **un número, que va del cero al uno y que mide el riesgo de ocurrencia.** Ese número me indica el grado de riesgo que existe acerca de la ocurrencia de un suceso o evento, donde el valor cero indica imposibilidad de ocurrencia y el numero 1 indica absoluta certeza acerca de la ocurrencia de ese suceso o evento. Ese número va a ser siempre un número Real.



En 0, 1 y en la Incertidumbre Laplaciana no hay riesgo. Riesgo es por ejemplo 0,40.

Aclaración: No se debe pensar al riesgo como algo malo sino como la posibilidad de ocurrencia de un evento.

Incertidumbre Laplaciana: Cuando ocurre la **equiprobabilidad eventual** (la probabilidad de que ocurra cualquier evento) me encuentro en el caso de incertidumbre Laplaciana. No siempre ocurre en 0,50. Ocurre cuando tengo la misma distancia para llegar a la imposibilidad que para llegar a la absoluta certeza. Es en el recorrido medio.

Por ejemplo:

Llueve

No llueve

2 Eventos → 50% Incertidumbre Laplaciana.

4 eventos → 25% Incertidumbre Laplaciana.

Pelota roja
Pelota azul
Pelota verde
Pelota amarilla

Tenemos, finalmente, una tercera definición que plantea que la probabilidad es la frecuencia relativa, que se le puede dar a priori, es decir, que se espera respecto a la ocurrencia de un evento.

Formas de Asignación o Tipos de Probabilidad.

1. **Probabilidad Clásica o Laplaciana:** Requiere que yo tenga conocimiento de cuales son todos los sucesos que forman parte del espacio muestral. Por ejemplo: Lanzamiento de un dado: tengo conocimiento de cuales son todos los posibles valores.
   Sea Ω un espacio muestral finito que contiene N eventos (simples o compuestos), y sea A un evento que puede darse de n maneras distintas, es decir, que al realizar el experimento hay N resultados posibles de los cuales n son favorables al evento A. La probabilidad de que ocurra el evento A esta dada por:

$$P(A) = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ Posibles} = \frac{n}{N}$$

Ejemplo:

Un individuo esta por jugar un juego en el que se lanzan dos dados, gana si el resultado de la suma de los números obtenidos en ambos dados es 7. La cantidad de resultados posibles es 36 (estos resultados son igualmente probables). Luego deberíamos determinar la cantidad de resultados favorables al evento “la suma de los dados sea 7”. Esto puede darse de 6 maneras distintas (1 y 6, 2 y 5, 3 y 4, 4 y 3, 3 y 2, 6 y 1). Así la probabilidad de que el apostador gane está dada por el cociente del número de favorables resultados al suceso, y el número de resultados posibles.

P(A) = 6/36 = 1/6 = 0,1667

Características de este ejemplo:

- Los 36 posibles resultados son mutuamente excluyentes, debido a que no puede aparecer más de un par en forma simultánea.
- Loa 36 resultados son igualmente probables.

2. **Probabilidad empírica o frecuentista:** En muchas situaciones prácticas los posibles resultados de un experimento no son igualmente probables. Por ejemplo: En una fábrica las posibilidades de observar un artículo defectuoso normalmente serán mucho más bajas que observar un artículo bueno. En este caso no es correcto calcular la probabilidad de encontrar un artículo defectuoso mediante el empleo de la definición clásica.
(Nosotros vamos a utilizar este tipo de probabilidad).

$$P(A) = \frac{Casos\ Favorables}{Casos\ Observados}$$

Ejemplo:

Consideremos un control de calidad de una empresa, en el cual se desea saber la probabilidad de que un artefacto tenga una vida útil superior a 1200 hs. Para ello el departamento de control de calidad separa 500 unidades de la producción y mide la vida útil de cada unidad. Los resultados los observamos en la siguiente tabla:

Duración en hs	Frecuencia Absoluta	Frecuencia Porcentual
Menos de 800	10	2%
800 a 899	40	8%
900 a 999	55	14%
1000 a 1099	70	11%
1100 a 1199	85	17%
1200 a 1299	115	23%
1300 a 1399	84	17%
1400 o mas	41	8%
	500	100%

La probabilidad de que la vida útil sea mayor o igual a 1200 hs es:

P(A) = (115 + 84 + 41) / 500 = 0,23 + 0,17 + 0,8 = 0,38

3. **Probabilidad Subjetiva:** Lo que la gente considere razonable para la probabilidad.

$$P(A) = Grado\ razonable\ de\ creencias$$

Ejemplo: al lanzar un nuevo producto al mercado, el gerente de ventas puede creer que el mismo tendrá un 70% de aceptación en el público, es decir, que la probabilidad (subjetiva) de que un individuo acepte el producto es de 0,7.

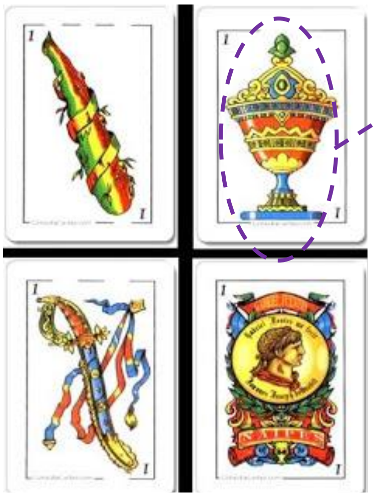
Eventos o Sucesos

Simples

Definen una sola característica del evento. Ocurren cuando solamente miro un espacio muestral.

Compuestos

Es un conjunto de eventos simples. Estoy componiendo espacios muestrales.



Un **evento simple** seria por ejemplo solo observar el palo de las cartas.

A= Palo de la baraja española de naipes.

Voy a tener 4 eventos: Ω_A = {Palo, Basto, Espada, Oro}

$\#\Omega_A = 4$

Un **evento compuesto** seria por ejemplo observar el palo y el número de las cartas.

A= Palo de la baraja española de naipes.

B= Numero que corresponde a la carta de la baraja española de naipes.

Ω_A = {Palo, Basto, Espada, Oro} $\#\Omega_A = 4$

$\Omega_B = \{B \in R \;/\; 1 \leq B \leq 12\}$ $\#\Omega_B = 12$

<u>Nomenclatura:</u>

A, B (letras mayúsculas) → Eventos

$\Omega \equiv S$ → Espacio Muestral

P(A) → Probabilidad de ocurrencia del evento A (marginal o simple)

P(A = a) → Probabilidad de que el evento A sea igual al valor a

P(B) → Probabilidad de ocurrencia del evento B (marginal o simple)

$P(A \cap B) \equiv P(AyB)$ → Probabilidad de ocurrencia conjunta del evento A y B

$P(A \cup B) \equiv P(AoB)$ → Probabilidad de ocurrencia de la unión inclusiva de eventos A y B

$P(A\underline{\cup}B)$ → Probabilidad de ocurrencia de la unión exclusiva de eventos A y B

$P(A \mid B)$ → Probabilidad de ocurrencia del evento A dado que ha ocurrido B

Partición de un espacio muestral

Son todas aquellas divisiones **mutuamente excluyentes** y **colectivamente exhaustivas** que se pueden realizar sobre un espacio muestral**.** Es por este motivo que puedo tener como máximo tantas particiones como eventos tenga el espacio muestral.

Ejemplo: En la baraja española de naipes cada número es la partición mínima que puede tomar el espacio muestral (no puedo dividir ese espacio muestral en 24 partes, como máximo puedo dividirlo en 12. Cada parte es un número). Esto es así porque tiene que ser colectivamente exhaustiva (es decir, tengo que tener todos los pedacitos del espacio muestral) y mutuamente excluyente (es decir, no puede haber un pedacito que corresponda a más de una partición).

Podría tomar, en vez de 12, 2 particiones, por ejemplo numero par y numero par, pero en este caso no podría tomar más de 12 particiones (teniendo en cuenta que es un evento simple, es decir, estoy trabajando con un solo espacio muestral, y la unidad mínima de análisis, el evento mínimo en este espacio muestral es el número de la carta).

Entonces...

Dos eventos son **mutuamente excluyentes** cuando **esos eventos son particiones de un mismo espacio muestral.** En otras palabras, dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si la ocurrencia de uno implica la no ocurrencia del otro.

Dos eventos son **colectivamente exhaustivos** cuando **en conjunto involucran a la totalidad del espacio muestral.** Es decir, la unión de los conjuntos que los representan conforman el espacio muestral.

Probabilidad Marginal

La probabilidad marginal es simplemente la probabilidad de ocurrencia de un evento A, sin pensar en la existencia de otro evento B que suceda de modo simultaneo con A.

Ejemplo: consideremos el lanzamiento de un dado. Podemos definir un evento simple como A = El resultado sea mayor o igual a dos. La probabilidad marginal de ese evento será P(A) = 5/6

Diagramas de Venn

Ejemplo 1

ESPADA A_1	COPA A_3
ORO A_2	BASTO A_4

Complemento

$\Omega_A = \{A_1 , A_2 , A_3 , A_4\}$

Complemento de $A_1 \rightarrow A'_1 = A_2 \cup A_3 \cup A_4$

Realice una partición en "espada y no espada". También podría particionar en oro y no oro si quisiese. Pero puedo realizar como máximo 4 particiones.

Ejemplo 2

Complemento

A = Números impares

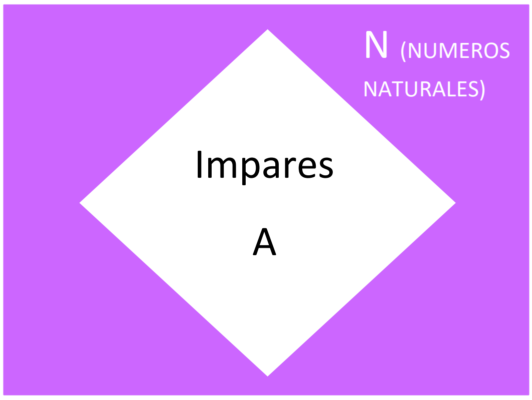
A' = Todo lo que no sea A

Ω_A = Números impares

N = Números naturales

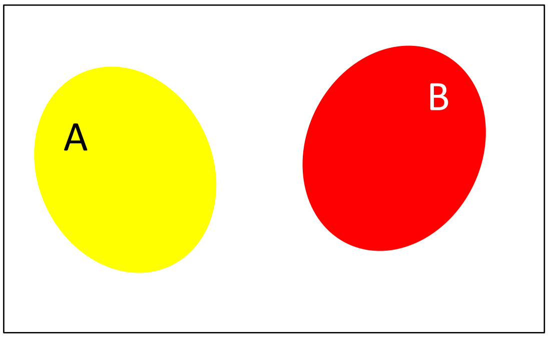
$N - \Omega_A = \Omega'_A \equiv \Omega_A^C$

$N - A = A' \equiv A \equiv A$



El complemento de un conjunto (A') es el conjunto de todos los elementos del espacio muestral que no pertenecen al evento A.

Ejemplo 3



A = {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9}

B = {2 ; 4 ; 6 ; 8}

AUB = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9}

Eventos compuestos:

Si quiero contar la cantidad de elementos que tiene A o la cantidad de elementos que tiene B lo que tengo que hacer simplemente es sumar (porque en este caso no hay ningún elemento de A que sea también de B).

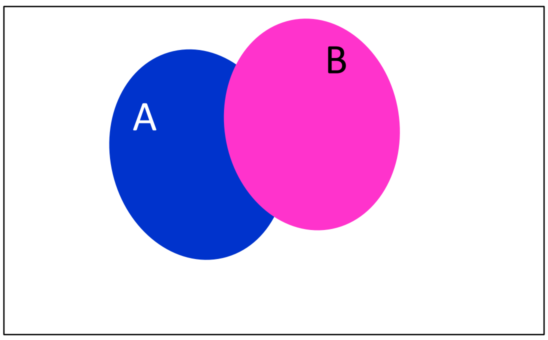
Entonces por más que estén separados los voy a ver como un conjunto.

Ejemplo 4

Unión inclusiva:

La unión de dos conjuntos (AUB) está dada por el conjunto de todos los resultados que pertenecen al evento A, todo lo que pertenece a B, y todo lo que pertenece a A y B

Cuando me interesa definir una unión inclusiva no me interesan los valores repetidos, entonces los saco del conjunto A o del conjunto B (En este ejemplo los saque de A).

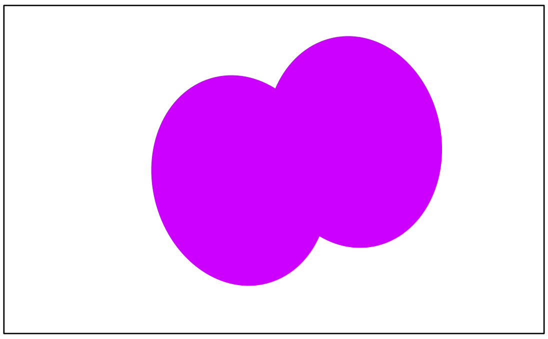


Múltiplos de 2 A = { 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , 12 }

Múltiplos de 3 B = { 3 , 6 , 9 , 12 , 15 }

Esos elementos que están repetidos, es decir, que pertenecen a A y a B los quito de uno de los dos conjuntos para evitar la doble contabilización:

AUB = { 2 , 3 , 4 , 6 , 8 , 9 , 10 , 12 , 15 }



AUB

Entonces, si quiero unir dos conjuntos:

AUB = A + B - A∩B

En probabilidad:

Unión Inclusiva → P(AoB) = P(A) + P(B) – P(AyB)

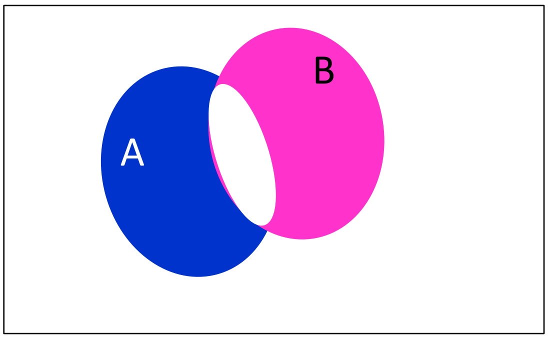
Ejemplo 5

<u>Unión Exclusiva:</u>

En este caso solo nos van a interesar los elementos que pertenecen a A o que pertenecen a B. Aquellos que pertenezcan a A y a B a la vez no los vamos a contabilizar.

En nuestro ejemplo nos va a interesar los números múltiplos de 2 o los números múltiplos de 3. No cuento los que son múltiplos de 2 y de 3.

A<u>U</u>B = { 2 , 3 , 4 , 8 , 9 , 10 , 15 }



A<u>U</u>B

$\underbrace{P(A\underline{U}B) = P(A) + P(B) - 2P(AyB)}$

Unión Exclusiva

Ejemplo 6

<u>Intersección:</u>

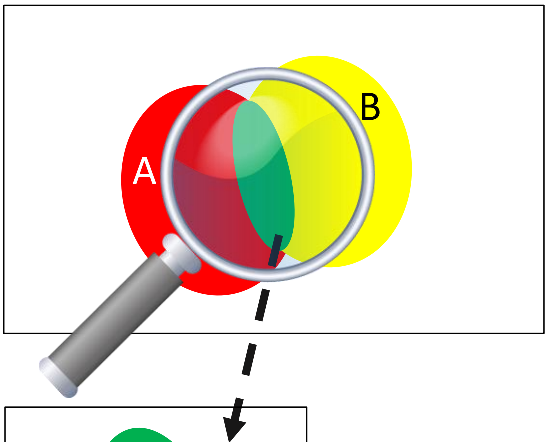
La intersección de dos conjuntos (A∩B) está dada por el conjunto de los resultados que pertenecen tanto a A como a B simultáneamente.

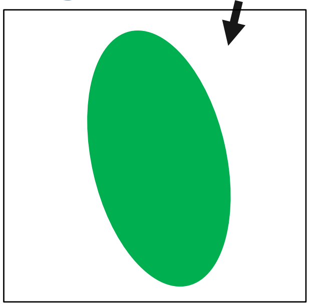
A = Múltiplos de dos

B = Múltiplos de tres

(A∩B) = (AyB) = { 6 , 12 }

Entonces, la probabilidad conjunta de dos eventos, A y B, es simplemente la probabilidad de que ambos sucedan al mismo tiempo.





Conclusiones

$\Omega_A = \{ A_1 , A_2 , A_3 , ... , A_K \}$

1- La cantidad máxima de particiones es igual al valor K. Podría hacer menos particiones pero no más.

2- $\forall_{i,j} \therefore P\left(A_i \cap A_j\right) = 0$ → Significa: Para todo par de A sub algo, por ejemplo A_1 con A_5, A_4 con A_6, es decir, para toda comparación de a pares, la probabilidad conjunta entre cualquier partición A subalgo con cualquier A subalgo es Nula. **No puede haber ningún elemento que pueda pertenecer a dos particiones a la vez. Sino no serían particiones.** Ejemplo: si una carta es par no puede ser impar.

A_1	A_2	A_3	A_4
A_5	A_6	A_7	A_8
A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}

Son particiones disjuntas que entre todas forman el espacio muestral.

Si quiero trabajar con las particiones como si fueran mini conjuntos se formalizaría así: → Por ejemplo, si realizo una partición definida en Par e Impar, es decir, realizo dos particiones, estas serán subconjuntos. Un subconjunto tendrá todos los elementos pares y el otro tendrá todos los elementos impares.

$$\underbrace{A_i \cap A_j}_{} = \emptyset$$

Me estoy preguntando cuantos elementos en común tienen estos dos conjuntos: ¿Cómo está formado el conjunto que incluye elementos de A_i con elementos de A_j?

Cuando opero con conjuntos obtengo conjuntos. Por eso la respuesta es el conjunto vacío.

3- $$\bigcap_{i=1}^{K} A_i = \emptyset \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k = \emptyset \Longrightarrow \underbrace{P\left(\bigcap_{i=1}^{K} A_i\right)}_{} = 0$$

La probabilidad de que haya elementos que pertenezcan a más de un conjunto es igual a cero.

Significado

Formalizado como una probabilidad: la probabilidad de que ocurran intersecciones.

4- $$\bigcup_{i=1}^{K} A_i = \Omega_A \Longrightarrow P\left(\bigcup_{i=1}^{K} A_i\right) = 1$$ → Me está diciendo que cuando uno todas las particiones obtengo como resultado el espacio muestral. Entonces la probabilidad de la unión de todas las particiones va a ser igual a 1.

Axiomas de Andrei Kolmogorov

Andrei Kolmogorov definió la medida o función de probabilidad mediante una serie de axiomas.

Dado un espacio muestral Ω, llamamos Medida de probabilidad a una función P que tiene como conjunto de salida al espacio muestral (el dominio) y que tiene como conjunto de llegada a los números reales, siendo su imagen los números reales que pertenecen al intervalo [0,1] si satisface los siguientes axiomas:

A) Si A es un evento cualquiera, entonces P(A) ≥ 0
B) P(Ω) = 1
C) Si A_1 ($\acute{\imath}$ = 1,2…) son eventos mutuamente excluyentes entonces:
P(A_1 U A_2 U …) = P(A_1) + P(A_2) + …

A partir de esos axiomas se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Conocida la probabilidad de un evento A, se puede conocer su complemento A^c mediante la siguiente relación:
$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

- La función de probabilidad está incluida en el intervalo real [0;1], es decir:
$$0 \ll P(A) \ll 1$$

- La probabilidad del evento vacío es nula, es decir
$$P(\emptyset) = 0$$

- Si A y B son dos eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de su unión es:
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Si A, B y C son 3 eventos cualesquiera, entonces la probabilidad de su unión es:
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

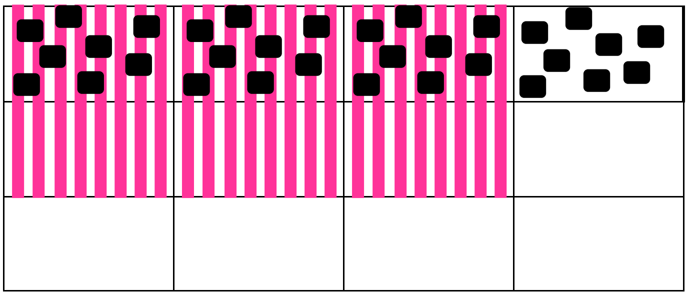
- Si A está incluida en B, entonces la probabilidad de A es menor o igual a la probabilidad de B.

$$A \sqsubseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

- Si A esta incluido en B, entonces la probabilidad de la intersección de los dos conjuntos coincide con la probabilidad de A:

$$A \sqsubseteq B \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)$$

Probabilidad Condicional



P(A) = 4/12 (Puntos negros)

P(B) = 6/12 (Rayas rosa)

Voy a evaluar cuál es la probabilidad de que ocurra B habiendo ocurrido A } P(B | A)

Y la probabilidad de que ocurra A habiendo ocurrido B. } P(A | B)

Pleca

P(B | A)

2: Ocurre B

1: Habiendo ocurrido A

Si me interesa evaluar cuál es la proporción de ocurrencia de B con respecto a A solo me voy a fijar en esos cuadraditos. No me interesan esos cuadrados que ocurren a la vez en proporción a la totalidad, solo me interesan en proporción a A. Por eso el denominador es P(A).

$$P(B|A) = \frac{P(ByA)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{12}}{\left(\frac{4}{12}\right)} = \frac{3}{4}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AyB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{12}}{\left(\frac{6}{12}\right)} = \frac{3}{6}$$

Recordatorio! No es lo mismo:

$$\frac{\left(\frac{4}{2}\right)}{2} = 1$$

$$\frac{4}{\left(\frac{2}{2}\right)} = 4$$

Cuando no hay paréntesis por convención es como si estuviera en el numerador, por eso, ¡no olvidar poner los paréntesis en el denominador!

Entonces…

$$\underbrace{P(A|B) = \frac{P(AyB)}{P(B)}}_{\text{Formalización Matemática: Tiene una interpretación, es una conceptualización.}} \Longrightarrow \underbrace{P(AyB) = P(B) \times P(A|B)}_{\text{Formula: No tiene una interpretación directa, no la puedo razonar. Llego a ella a partir de la formalización matemática.}}$$

$$P(B|A) = \frac{P(ByA)}{P(A)} \Longrightarrow P(ByA) = P(A) \times P(B|A)$$

En el ejemplo que trabajamos:

$$\frac{3}{12} = \frac{6}{12} \times \frac{3}{6} \qquad \wedge \qquad \frac{3}{12} = \frac{4}{12} \times \frac{3}{4}$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 3, sabiendo que el resultado del primer dado fue 2.

$$P(d_1 + d_2 = 3 | d_1 = 2) = \frac{P(d_1 + d_2 = 3 \cap d_1 = 2)}{P(d_1 = 2)} = \frac{\frac{1}{36}}{\left(\frac{1}{6}\right)} = \frac{1}{6}$$

Eventos estadísticamente independientes

Dos eventos A y B son estadísticamente independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro, es decir que:

P(A|B) = P(A)

Ejemplo:

A: Cara superior de un dado lanzado con cubilete.

B: Calificación obtenida en la materia.

P(B=7|A=1) = P(B=7)

¡CUIDADO!

EVENTOS INDEPENDIENTES ≠ EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES

Regla de Multiplicación de Probabilidades

Si A y B son dos eventos **estadísticamente independientes**, entonces la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades marginales:

$$\underbrace{\mathbf{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}}$$

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(AyB)}{P(B)} \Longrightarrow P(A) \times P(B) = P(AyB)$$

$$P(B|A) = P(B) = \frac{P(ByA)}{P(A)} \Longrightarrow P(B) \times P(A) = P(ByA)$$

Se destaca que la independencia es una **relación simétrica** entre eventos, esto quiere decir que si A es independiente de B entonces B es independiente de A.

Regla de la suma

Si A y B son dos eventos **mutuamente excluyentes**, entonces la unión de ambos eventos será igual a la suma de los eventos simples:

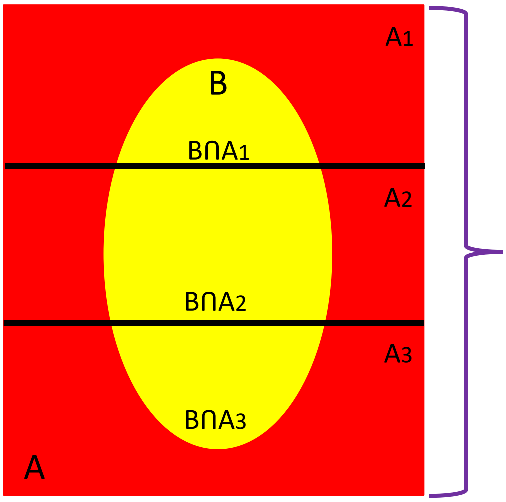
$P(AUB) = P(A) + P(B) - \underbrace{P(AyB)}$

Para Eventos mutuamente excluyentes la probabilidad de que ocurra A y B va a ser igual a **cero,** ya que no pueden suceder a la vez.

Entonces…

P(AUB) = P(A) + P(B)

Teorema de la probabilidad total



Tenemos 2 eventos. A y B.

Vamos a realizar particiones, es decir, subconjuntos del espacio muestral que no comparten elementos

Particiones:

A1
- B’ → Tiene una parte donde no está B
- B → Tiene una parte donde esta B

A2
- B’ → Tiene una parte donde no está B
- B → Tiene una parte donde esta B

A3
- B’ → Tiene una parte donde no está B
- B → Tiene una parte donde esta B

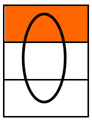
Las partes donde no está B no me interesa analizarlas, solo me interesa donde esta B.

$$A_1 \longrightarrow B \longrightarrow P(A_1) \times P(B|A_1) = P(B \cap A_1)$$

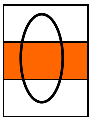
$$A_2 \longrightarrow B \longrightarrow P(A_2) \times P(B|A_2) = P(B \cap A_2)$$

$$A_3 \longrightarrow B \longrightarrow P(A_3) \times P(B|A_1) = P(B \cap A_3)$$

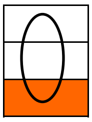
$$P(B|A_1) = \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)}$$



$$P(B|A_2) = \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)}$$



$$P(B|A_3) = \frac{P(B \cap A_3)}{P(A_3)}$$



¿Qué significa esto? Esto muestra que a mí me interesa estudiar la proporción que ocupa B con respecto a cada partición y no con respecto al total.

Si sumo esas tres particiones voy a obtener la probabilidad de B.

Así llego al

Teorema de la probabilidad total.

La probabilidad **marginal** o **simple** de un evento es la **suma** de las **probabilidades conjuntas.**

$$\boldsymbol{P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) = P(B)}$$

$$\boldsymbol{P(B) = P(B|A_1) \times P(A_1) + P(B|A_2) \times P(A_2) + P(B|A_3) \times P(A_3)}$$

Es lo mismo escrito de distintas formas

Teorema de la probabilidad total: La probabilidad marginal de ocurrencia de un evento es igual a la suma del producto (multiplicación) de las probabilidades marginales de los eventos condicionantes por las probabilidades condicionales de ocurrencia del evento a estudiar dadas las ocurrencias de sus respectivas particiones.

Cantidad de particiones

Sumo multiplicaciones

$$P(B) = \sum_{K=1}^{n} P(B|A_K) \times P(A_K)$$

Probabilidad Marginal o simple de un evento a estudiar

Probabilidad Condicional

Probabilidad marginal de la partición del evento condicionante

En otras palabras: La probabilidad marginal de que ocurra B es igual a la suma de las probabilidades conjuntas entre B y cada una de las particiones del evento condicionante:

$$P(B) = \sum_{K=1}^{n} P(B \cap A_K)$$

A partir de esta formalización surge la fórmula de arriba

Teorema de Bayes

Ejemplo:

$\Omega_B = \{ B_1 , B_2 , B_3 \}$

$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$

$= P(A|B_1) \times P(B_1) + P(A|B_2) \times P(B_2) + P(A|B_3) \times P(B_3)$

$$P(A) = \sum_{K=1}^{3} P(A|B_K) \times P(B_K)$$

Probabilidad Total

Por otro lado…

$$P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)}$$

Probabilidad Condicional

Bayes utiliza esa estructura para desarrollar su teorema:

$$P(B_J|A) = \frac{\overbrace{P(A|B_J) \times P(B_J)}^{\text{Probabilidad conjunta}}}{\underbrace{\sum P(A|B_K) \times P(B_K)}_{\text{Probabilidad Total}}} = \frac{P(A \cap B_J)}{P(A)}$$

<u>Árbol de Probabilidad</u>