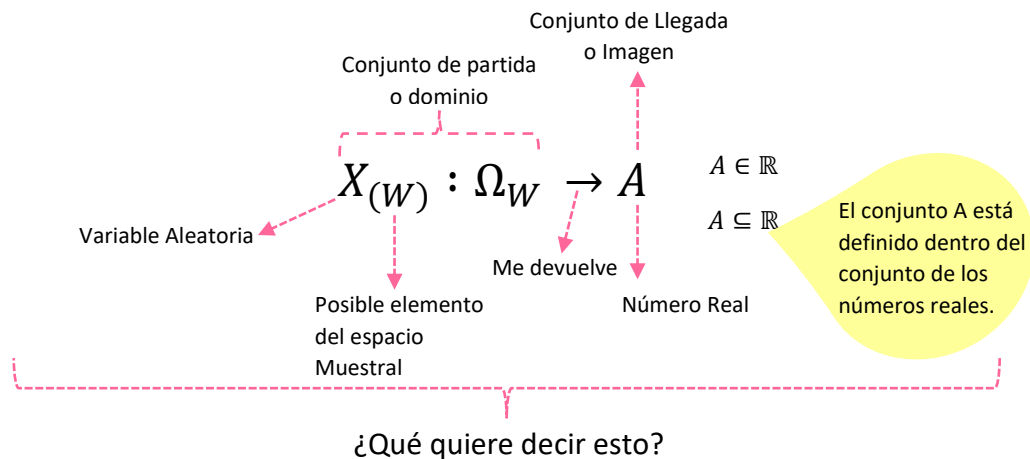


Variables Aleatorias

Una variable aleatoria es una función que le asigna un número real a cada posible resultado del espacio muestral analizado.



A esta función denominada **variable aleatoria** le voy a meter cualquier elemento que sea del espacio muestral W y me va a devolver un número que va a pertenecer al conjunto de los números reales.

Variable aleatoria Discreta:

Una variable aleatoria es discreta si la **imagen** de la misma está constituida por un **conjunto numerable**.

Es decir, a la variable aleatoria le meto un elemento del espacio muestral y tengo como resultado un conjunto imagen donde el cardinal de A es numerable, contable: Entre un elemento del conjunto y otro elemento del conjunto puedo establecer un salto, no es un conjunto denso.

$$V. A \text{ Discreta} \Rightarrow X_{(W)} \rightarrow A \quad \#A \text{ es numerable, contable.}$$

Variable aleatoria Continua:

Una variable aleatoria es continua si a imagen de la misma está constituida por un **intervalo de números reales**.

$$X_{(W)} \rightarrow (a; b) \quad \text{con } (a; b) \subseteq \mathbb{R}$$

Este subconjunto proviene de procesos de medición. Es un conjunto denso, no puedo realizar un salto discreto.

Sea una **variable aleatoria discreta**, definida sobre un espacio muestral Ω . Se dice que su **función de probabilidad** cumple las siguientes condiciones:

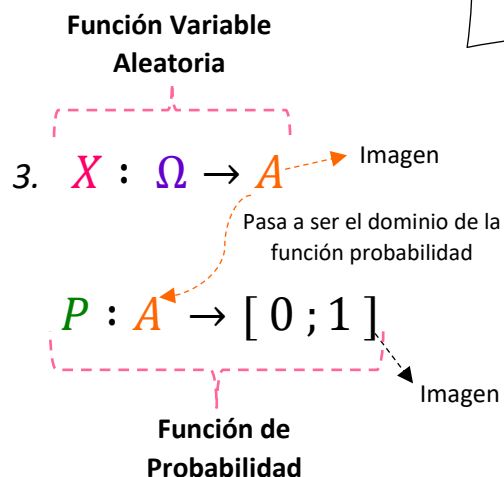
1. $\forall x \in A : P(x) \geq 0$

Para todo x que pertenece a A , se da que

Para todo valor de x que pertenece a A , es decir, para todos los resultados que obtengo de aplicar la función variable aleatoria a los valores del espacio muestral, se da que la probabilidad de ocurrencia de ese resultado es mayor o igual a cero.

2. $\sum_{x \in A} P(x) = 1$

Los resultados de aplicarle a cada valor del espacio muestral la función variable aleatoria, me va a dar un número. Cada uno de esos números va a ser un x . La probabilidad de ese x va a ser mayor o igual a cero, y la suma de todas las probabilidades va a ser igual a 1.



Si a la **variable aleatoria** le metemos **elementos del conjunto espacio muestral**, voy a obtener como resultado un **conjunto numérico**.

Si a la **función de probabilidad** le pongo **elementos numéricos resultantes de la aplicación de la variable aleatoria** voy a tener como resultado un conjunto que va a estar formado por números entre cero y uno.

Función de probabilidad:

- Se da para variables discretas
- Es una **composición de funciones**. Porque toma como dominio la imagen de la variable aleatoria (función anterior).

- Si quiero conocer la probabilidad de que ocurra alguno de los distintos elementos del espacio muestral:

$$P(\Omega) = \sum_{w \in \Omega} P(X_{(w)}) = 1$$

Probabilidad de que ocurra alguno de los elementos del espacio muestral.

Es la suma de aplicarle a todos los elementos del espacio muestral la función Variable Aleatoria.

$$= \sum_{x \in A} P(A = x) = 1$$

Imagen de la variable aleatoria

$$= \sum_{x \in A = X_{(w)}} P(X_{(w)} = x) = 1$$

Conjunto formado por la aplicación de la variable aleatoria a todos los elementos del espacio muestral.

¿Qué nos quiere decir todo esto? **La probabilidad de que ocurra cualquier elemento del espacio muestral es 1.** Porque en este caso no me importa cuál es el elemento que ocurra, solo me importa que ocurra alguno.

Ejemplo:

Se realiza un experimento que consiste en lanzar dos veces una misma moneda.

C: Cara de la moneda.

C': No cara de la moneda.

$\Omega: \{ CC ; CC' ; C'C ; C'C' \}$

Puedo saber a priori que al lanzar dos veces la moneda ocurrirá alguna de las siguientes opciones:

- Sale dos veces la cara
- Sale la cara y luego no cara
- Sale no cara y luego cara
- Sale no cara ambas veces

X : Se asigna \$1 por cada cara obtenida. $\rightarrow X_{(W)} = A$

$$X_{(CC)} = 2$$

$$X_{(CC')} = 1$$

$$X_{(C'C)} = 1$$

$$X_{(C'C')} = 0$$

Función Variable Aleatoria

Observación: Muchas veces no nos interesa el resultado en sí del experimento sino de un número que le puedo asignar a ese resultado. Eso me va a permitir calcular medidas de resumen aun cuando este trabajando con resultados medidos en escala ordinal o nominal.



$$0,25 = P_r(X_{(W)} = 2) = P_r(CC)$$

$$0,25 = P_r(X_{(W)} = 0) = P_r(C'C')$$

$$0,25 = P_r(X_{(W)} = 1) = P_r(CC')$$

$$0,25 = P_r(X_{(W)} = 1) = P_r(C'C)$$

La probabilidad se evalúa sobre los resultados de aplicar la variable aleatoria a los eventos del espacio muestral.

Si no tengo información sobre como opero la variable aleatoria y solo tengo información acerca del resultado de la variable aleatoria:

$$P_r(X = 0) = 0,25$$

$$P_r(X = 1) = 0,50$$

$$P_r(X = 2) = 0,25$$

Es la distribución de probabilidad de X

$$\sum_{x=0}^2 P(X_{(W)} = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$$

X mayúscula. Es la variable aleatoria

x minúscula. Es el resultado de aplicar la variable aleatoria

Aplico la probabilidad a los resultados de aplicar la variable aleatoria.

$$\sum_{W \in \Omega} P(W) = P(CC) + P(CC') + P(C'C) + P(C'C')$$

Aplico la probabilidad a los elementos del espacio muestral.

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{x=0}^b P(X)$$

$$P(1 \leq X \leq 2) = \sum_{x=1}^2 P(X) = P(X=1) + P(X=2) = 0,50 + 0,25 = 0,75$$

No olvidar! Las funciones de probabilidad solo se aplican a variables aleatorias discretas.

A la hora de trabajar con una **variable aleatoria continua** utilizaremos la llamada **Función de densidad de probabilidad**.

Función de densidad de probabilidad:

$$1) X_{(wi)} = a / a \in \mathbb{R} \quad \forall_i \rightarrow X_{(wi)} \text{ Es una variable aleatoria continua}$$

Significado de la notación: Le aplico la V.A a un determinado elemento del espacio muestral y eso me devuelve un resultado "a" tal que "a" es un número real.

$$2) P(a) = 0$$

Significado de la notación: La probabilidad de encontrar un valor exacto es nula.

$$3) a \leq P(X) \leq b = \int_a^b f(x) dx$$

Significado de la notación: La probabilidad de que x este entre "a" y "b" va a ser igual a la integral definida entre a y b de la función de densidad.

$$a \leq P(X) \leq a = \int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$$

Demostración matemática de que la probabilidad de que ocurra un punto en un espacio continuo es nula.

Entre dos puntos hay infinitos puntos, por lo tanto, hay infinitos casos posibles. Si quiero que el caso favorable sea 1 punto específico podríamos pensarlo así:

$$\frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos Posibles}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Condiciones de la función de densidad:

1. Va a ser estrictamente **no negativa**. $f(x) \geq 0$
2. Cuando aplico la integral desde α hasta β tiene que ser igual a 1
 α : Límite inferior del dominio. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 1$
 β : Límite superior del dominio.
 (Los límites del dominio pueden ir desde $-\infty$ a $+\infty$)

Ejemplo:

Se tiene una variable aleatoria X definida en el intervalo $[0,3]$ cuya función de densidad es $f(x) = \frac{x^2}{9}$

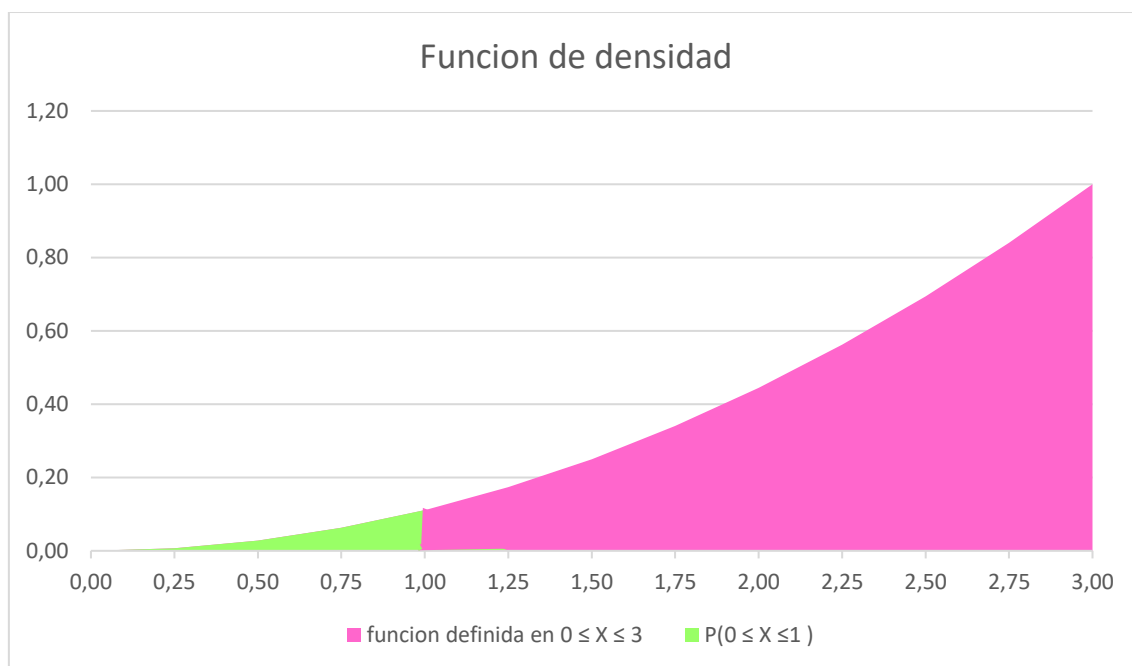
Lo primero que tengo que hacer es chequear que se cumplan las condiciones anteriormente mencionadas, para verificar de esa forma que efectivamente se trata de una función de densidad:

1. La función utilizada para ejemplificar no es negativa nunca. 👍
2. $\int_0^3 \frac{x^2}{9} dx = \frac{x^3}{27} \Big|_{x=0}^{x=3} = \frac{3^3}{27} - \frac{0^3}{27} = 1 - 0 = 1$ 👍

Yo podría preguntarme cuál es la probabilidad de que x esté entre 0 y 1:

$$P(0 \leq X \leq 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{9} dx = \frac{x^3}{27} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1^3}{27} - \frac{0^3}{27} = \frac{1}{27} - 0 = \frac{1}{27}$$

Podríamos graficar a la función de la siguiente manera:



Lo que hace la función de densidad es decirme de qué manera se forma la superficie debajo de la curva. La integral la utilizamos porque justamente me permite calcular el área debajo de esa curva que representa la función definida entre 0 y 3.

Resumen hasta acá...

$P(X = x)$ Funcion de probabilidad para variables aleatorias discretas

$f(x) = P(a \leq X \leq b)$ Funcion de densidad para variables aleatorias continuas

Ahora conoceremos otra función más, que puede ser utilizada tanto para **variables aleatorias discretas**, como para **variables aleatorias continuas**:

Función de distribución Acumulada:

$F_X(x) = P(X \leq x)$ Para variables aleatorias discretas

$F_X(x) = P(X \leq x)$ Para variables aleatorias continuas

Se simbolizan igual pero se calculan distinto.

$$VAD = \sum_{y \leq x} P(y)$$

La función de distribución acumulada para variables aleatorias discretas es igual a la suma de todas las probabilidades para $y \leq x$

$$VAC = \int_{y \leq x} f(y) dy$$

La función de distribución acumulada para variables aleatorias continuas es igual a la integral de la función de densidad con $y \leq x$

La función de distribución acumulada barre desde el límite inferior del dominio hasta el límite del valor que yo quiera.

Siempre que evalúe la función de acumulación desde el límite inferior del dominio hasta el límite superior del dominio el resultado va a ser igual a 1.

Por lo tanto:

- Si yo quisiese evaluar la función en el límite inferior del dominio, esta función de acumulación va a tender a cero.

$$F(\text{LIM INF DOM } f(x)) \rightarrow 0$$

- Si yo quiero evaluar la función en un valor cercano al límite superior del dominio de $f(x)$ esto va a tender a uno.

$$F(\text{LIM SUP DOM } f(x)) \rightarrow 1$$

Ejemplos:

Siendo X una variable aleatoria continua, quiero averiguar la probabilidad de que x sea menor o igual a un determinado valor C .

$$P(X < C) \quad F(X) = \int_{-\infty}^C f(x) dx$$

Función de
acumulación

Función de
densidad

Siendo X una variable aleatoria discreta, quiero averiguar la probabilidad de que x sea menor o igual a 1, siendo cero el límite inferior del dominio.

$$\sum_{y \leq x} P(y) \rightarrow P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$