

Introducción

Función generatriz de momentos:

La función generatriz de momentos es una función que me permite calcular los distintos momentos absolutos de orden N. De esta forma podremos calcular la esperanza y la varianza de las distintas distribuciones de probabilidad.

$$\text{FGM}(X) = \theta_X(t) = E(e^{x \times t})$$

FGM es una función de la **variable auxiliar t**

Es igual a la esperanza de e elevado al producto de x por t

Ahora bien, vamos a tener una función generatriz de momentos para variables aleatorias continuas y otra para variables aleatorias discretas.

FGM para Variables aleatorias continuas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x_i \times t} \times f(x) dx$$

FGM para Variables aleatorias discretas:

$$\sum_{i=1}^n e^{x_i \times t} \times P(x_i)$$

Valores que puede tomar la variable aleatoria

¡Recordatorio!

Cuando hablamos de momentos nos referimos a promedios de cosas y, como lo vimos cuando estudiamos la media aritmética, los promedios pueden calcularse de dos formas distintas: trabajando con los datos de manera agrupada o de manera desagrupada. Cuando trabajábamos los datos de manera agrupada multiplicábamos a cada clase con su frecuencia relativa simple y es justamente eso lo que estamos haciendo en esta sumatoria, solo que en lugar de trabajar con frecuencias relativas trabajamos con probabilidades de ocurrencia (la probabilidad de que ocurra cada valor que puede tomar la variable aleatoria).



Volviendo al ejemplo de las monedas visto en el capítulo anterior:

x_i	$P(x_i)$
0	0.25
1	0.50
2	0.25

$$\sum_{i=0}^2 e^{x_i \times t} \times P(x_i) = e^{0 \times t} \times P(0) + e^{1 \times t} \times P(1) + e^{2 \times t} \times P(2)$$

$$e^{0 \times t} \times 0,25 + e^{1 \times t} \times 0,50 + e^{2 \times t} \times 0,25$$

Todo número
elevado a la 0 es
igual a 1

A partir de la función generatriz de momentos vamos a poder calcular los momentos absolutos de cualquier orden de la siguiente manera:

$$M_K = \frac{\partial^k \theta_x(t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0}$$

No es una potencia, es el orden de derivada
 Es decir, voy a derivar un número de veces igual al número de orden del momento absoluto.
 Momento absoluto de orden K
 Me dice en función de que tengo que derivar
 Lo evaluamos en cero

Si yo quiero calcular el momento absoluto de orden 1 voy a tener que hacer la primera derivada de t cuando t es igual a cero.

$$M_1 = \frac{\partial' \theta_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

¡Recordatorio!

Cuando calculamos el momento absoluto de orden 1 lo que estamos calculando es la media que, aritméticamente, es lo mismo que la **Esperanza**.

Entonces..

$$\mu_x = E(x) = M_1$$



Siguiendo esta misma lógica, para calcular el momento absoluto de orden 2 voy a tener que hacer la segunda derivada de t cuando t es igual a cero.

$$M_2 = \frac{\partial'' \theta_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$$

Ahora bien, antes de seguir analicemos un poco la varianza:

Como vimos la varianza, al igual que la media, puede ser calculada teniendo tanto los datos agrupados como desagrupados.

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \mu_X)^2}{N}$$

Varianza para datos agrupados.

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \times fr(x_i)$$

Varianza para datos desagrupados.

Vamos a realizar todo un desarrollo sobre la varianza para datos desagrupados, pero con la diferencia de que, como dijimos, estamos trabajando con probabilidades, entonces en lugar de multiplicar las observaciones con respecto a la media al cuadrado por la frecuencia relativa simple, las multiplicaremos por su probabilidad de ocurrencia:

$$VAR(X) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_X)^2 \times P(x)$$

Partiendo de acá vamos a descomponer el binomio al cuadrado (lo resaltado con gris), entonces:

$$VAR(X) = \sum (x^2 - 2x\mu_x - \mu_x^2) \times P(x)$$

Binomio al cuadrado:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ahora vamos a realizar distributiva para poder separar los términos en distintos sumandos:

$$VAR(X) = \sum (x^2 - 2x\mu_x - \mu_x^2) \times P(x)$$

$$VAR(X) = \sum x^2 p(x) - \sum 2x\mu_x p(x) + \sum \mu_x^2 p(x)$$

Analizaremos ahora cada uno de los términos:



$$\sum x^2 p(x)$$

Lo que tenemos en este primer término es un **momento absoluto de orden 2.**

Recordemos que un momento absoluto de **orden K** lo podíamos expresar de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^N \frac{X_i^k}{N}$$

Que es lo mismo que multiplicar a cada observación por su frecuencia relativa simple (en este caso su probabilidad de ocurrencia)

M₂



$$\sum 2x\mu_x p(x)$$

Tanto **2** como μ_x son **constantes** que las vamos a sacar por fuera de la sumatoria.

$$2\mu_x \sum x p(x) = 2\mu_x \mu_x = 2\mu_x^2$$

Siguiendo el mismo razonamiento, lo que tenemos acá es un momento absoluto de orden uno, que es igual a la **media aritmética.**

Momento Absoluto de orden 1 al cuadrado

2M₁²


 $\sum \mu_x^2 p(x) =$

En un principio volvemos a repetir el mismo paso sacando la **constante** (μ_x) por fuera de la sumatoria

$\mu_x^2 \sum p(x) = \mu_x^2$

Por la ley de cierre sabemos que la suma de las probabilidades es igual a 1

Momento Absoluto de orden 1 al cuadrado

M_1^2

Ahora reemplazamos en nuestra ecuación original lo que obtuvimos como conclusión en cada termino y obtenemos:

$$VAR(X) = M_2 - 2M_1^2 + M_1^2$$

$$VAR(X) = M_2 - M_1^2$$

Conclusiones:

- $E(X) = \mu_x = M_1$
- $VAR(X) = \sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = M_2 - M_1^2$



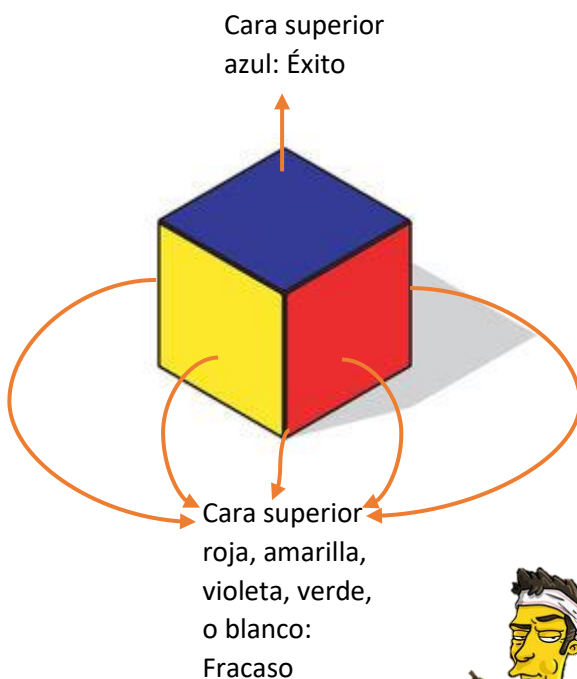
Distribuciones teóricas de probabilidad

Distribución de Bernoulli

Experimento de Bernoulli

El experimento de Bernoulli se trata de un experimento dicotómico, es decir, de un experimento que tiene dos posibles resultados: **Éxito o No éxito (Fracaso)**.

Por ejemplo: Se realiza el experimento de lanzar un dado de colores. Si al tirar el dado la cara superior que sale es la cara azul entonces lo consideraremos un éxito pero, si por lo contrario, sale cualquier otra cara que no sea la azul, lo consideraremos un fracaso.



P = Probabilidad de éxito.

$Q = (1-P)$ = Probabilidad de fracaso.

$W = \{\text{Azul, rojo, amarillo, violeta, verde, blanco}\}$

Éxito $\rightarrow$ Azul $\rightarrow P = 1/6$

Fracaso $\rightarrow$ No Azul $\rightarrow Q = (1-P) 5/6$

¡Recordatorio!

Las particiones realizadas sobre un mismo espacio muestral son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas, por lo tanto, la suma de las probabilidades de todas ellas me va a dar siempre 1. Es por este motivo que podemos calcular la probabilidad de fracaso como 1 menos la probabilidad de éxito. $(1-P)$

$$P + (1-P) = 1$$



Variable aleatoria de Bernoulli:

No debemos confundir el experimento de Bernoulli con la variable aleatoria Bernoulli: esta última es aquella función que convierte a cada una de las clases en un número real. En nuestro ejemplo del cubo podríamos decir que a partir de ahora no nos importa el color en sí que sale, sino el número real que lo representa.

Variable aleatoria Bernoulli $\Omega_w = \{ \text{Éxito}, \text{Fracaso} \}$

$$X(\text{Éxito}) = 1 \rightarrow P(x = 1) = P$$

$$X(\text{Fracaso}) = 0 \rightarrow P(x = 0) = 1 - P = Q$$

Para comprobar esto matemáticamente presentaremos a la función de Bernoulli y la evaluaremos en 0 y 1.

función de Bernoulli:

$$P(X) = P^x(1 - P)^{1-x}$$

Evaluamos la función de Bernoulli en $x = 0$ y en $x = 1$

$$P(0) = P^0(1 - P)^{1-0} = 1(1 - P) = 1 - P = P(x = 0)$$

$$P(1) = P^1(1 - P)^{1-1} = P1 = P = P(x = 1)$$

Tal y como dijimos antes:

$$P + (1 - P) = 1$$

Ahora, utilizando la función generatriz de momentos vista anteriormente, vamos a calcular la esperanza y la varianza de Bernoulli.

Partimos entonces de la función generatriz de momentos (FGM):

$$\theta_X(t) = E(e^{xt})$$

La distribución de Bernoulli es una distribución de probabilidad **discreta**, por lo tanto la esperanza de "e" la calcularemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^1 e^{xt} \times P(x) &= e^{0t} \times P(0) + e^{1t} \times P(1) = \\ e^{0t} \times P^0(1 - P)^{1-0} &+ e^{1t} \times P^1(1 - P)^{1-1} = \end{aligned}$$

Reemplace en P(0) y en P(1) la función de Bernoulli
valuada en 0 y en 1 respectivamente

Realizo las cuentas
para ordenar un
poco

$$e^{0t} \times (1 - P) + e^{1t} \times P$$

$$(1 - P) + e^t P$$

FGM para una
variable aleatoria
Bernoulli.

Una vez obtenida la función generatriz de momentos para una variable aleatoria Bernoulli la derivamos para poder encontrar la media y la varianza:

$$M_K = \frac{\partial^k \theta_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

$$\theta_x(t) = (1 - P) + e^t P \quad \text{--- Lo que voy a derivar}$$

$$M_1 = \frac{\overbrace{\partial'(1 - P)}^{\text{Es una constante}} + \overbrace{e^t P}^{\text{Es una constante}}}{\underbrace{\partial t}_{\text{Me indica que derivamos en función de } t}} = \underbrace{0 + e^t P}_{\text{Resultado de derivar}} \Big|_{t=0}$$



Explicación de la derivada:

Por empezar tenemos una multiplicación entre una constante (P) y una función (e^t), por lo tanto, por regla de derivación, el resultado de derivar eso será la constante por la función derivada. Ahora bien, sabemos que la derivada de e^t es e^t pero acá le dejamos el paso a paso:

$$f(x) = e^x$$

$$\ln f(x) = x \ln e$$

$$\ln f(x) = x$$

$$(\ln f(x))' = x'$$

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 1$$

$$f'(x) = f(x)$$

$$f'(x) = e^x$$

$$e^t P|_t = 0$$

Evaluamos la derivada en $t=0$ y obtenemos que

$$e^0 P = P$$

Ahora procederemos a encontrar el Momento Absoluto de orden 2 ya que, como vimos mas arriba, lo necesitamos para la conformación de la varianza:

$$M_2 = \frac{\partial''(1 - P) + e^t P}{\partial t} =$$

$$M_2 = \frac{\partial[(\partial 1 - P) + e^t P]}{\partial t} =$$

$$M_2 = \frac{\partial e^t P}{\partial t} = e^t P|_t = 0 = P$$

Una vez obtenidos M_1 y M_2 reemplazamos esos datos en las conclusiones que obtuvimos mas arriba sobre la varianza y la esperanza:

$$E(X \rightarrow Be(P)) = M_1 = P$$

Significa: La Esperanza de la variable aleatoria X que sigue una distribución de Bernoulli

$$VAR(X \rightarrow Be(P)) = M_2 - M_1^2 = P - P^2 = P(1 - P)$$

Significa: La Varianza de la variable aleatoria X que sigue una distribución de Bernoulli

Simplemente saco factor común

No debemos confundir:

$$P(x_i) \neq P^{x_i} \times (1 - P)^{1-x_i}$$

Probabilidad de que la variable tome determinado valor

Probabilidad de éxito de la distribución de Bernoulli



Conclusiones:

Una primera diferencia que vamos a encontrar entre las distribuciones de probabilidad son los distintos valores que puede tomar la Variable Aleatoria: Por ejemplo, en la distribución de Bernoulli solo puede tomar los valores 0 o 1.

Distribución Uniforme

La distribución uniforme presenta equiprobabilidad para todo $x \in A$. Es decir, le asigna la misma probabilidad de ocurrencia a cada elemento resultante de aplicarle la función variable aleatoria.

$$X: \Omega \rightarrow A \quad \Rightarrow X(w_i) = x$$

Distribución Binomial

Para poder explicar la distribución binomial primero vamos a introducir un concepto denominado **Proceso de Bernoulli**. Un proceso de Bernoulli es una repetición de n veces de un experimento de Bernoulli, sin embargo, debe aclararse que no toda repetición de n veces es un proceso de Bernoulli.

Para que esas repeticiones sean consideradas un proceso de Bernoulli deben cumplir con ciertas características:

- 1) Las probabilidades de ocurrencia deben ser independientes una de las otras
- 2) Las probabilidades de éxito se deben mantener constantes



Si nos detenemos a observar bien ambas condiciones están relacionadas entre si: Si las variables aleatorias son independientes entre si en consecuencia las probabilidades de éxito se van a mantener constante, y si las probabilidades de éxito se mantienen constantes va a ser porque las variables son independientes una de las otras.

Ahora bien, ¿Cuándo puede suceder que se mantengan constantes las probabilidades de éxito?

- 1- Cuando N , el tamaño poblacional, es infinito.
O
- 2- Cuando N es finita pero hay reposición de elementos
O

- 3- Cuando N es muy grande, tal que, sin haber reposición de elementos, la cantidad de veces que se repita el experimento (n) sea de una proporción menor al 5% de N. $\frac{n}{N} \leq 0,05$

Volviendo a nuestro ejemplo del dado de colores, si realizo 5 veces el experimento de Bernoulli, la probabilidad de que salga el color azul va a ser $1/6$ en cada una de las repeticiones del experimento, es decir, la probabilidad de éxito se va a mantener constante.

Dicho esto, podemos definir a la distribución Binomial como aquella distribución que es generada por un proceso de Bernoulli.

Ejemplo:

Se lanzan 5 dados. 

X es una variable aleatoria que indica con 1 si el resultado de lanzar el dado es 1 o 2 y se desea saber cual es la probabilidad de que 3 dados caigan en 1 o en 2.

→ $X = 3$ → (Sumo los resultados de las variables aleatorias individuales, de cada dado)

Éxito: En cada dado sale 1 o 2

Fracaso: En cada dado no sale ni 1 ni 2.

$n=5$

Una forma errónea de resolver esto seria suponer que $P \times P \times P \times Q \times Q$ es la única opción, ya que es una de las 10 posibles combinaciones.

$P \times P \times P \times Q \times Q$
 $P \times P \times Q \times P \times Q$
 $P \times P \times Q \times Q \times P$
 $P \times Q \times P \times P \times Q$
 $P \times Q \times Q \times P \times P$
 $Q \times P \times P \times P \times Q$
 $Q \times Q \times P \times P \times P$
 $Q \times P \times Q \times P \times P$
 $Q \times P \times P \times Q \times P$
 $P \times Q \times P \times Q \times P$

10 Posibles combinaciones para que $X=3$

Dos posibles resultados para tener éxito

Quiero que de éxito 3 veces

Por lo tanto quiero que de fracaso 2 veces sabiendo que son 5 las repeticiones

Entonces...

Forma incorrecta de calcularlo: $P \times P \times P \times Q \times Q = \left(\frac{2}{6}\right)^3 \times \left(\frac{4}{6}\right)^{5-3}$



$$P \times P \times P \times Q \times Q = \underbrace{P^X \times Q^{n-X}}$$

¿Qué significa esto? Es el producto de la probabilidad de éxito, elevado a la cantidad de éxitos que quiero tener, por la probabilidad de fracaso elevado a la cantidad de repeticiones del experimento de Bernoulli menos la cantidad de veces que quiero tener éxito ("la cantidad de fracasos que quiero")

Forma correcta de calcularlo: $10 P \times P \times P \times Q \times Q = 10 \times \left(\frac{2}{6}\right)^3 \times \left(\frac{4}{6}\right)^{5-3}$



Formalización:

$$P(X=3 | n=5, P=1/3) = \binom{n}{x} \times P^x \times Q^{n-x}$$

$$\underbrace{\left(\frac{n!}{x!(n-x)!} \right)}_{\text{Así obtengo la cantidad de posibilidades distintas obtener}} \times P^x \times Q^{n-x}$$

Así obtengo la cantidad de posibilidades distintas obtener
Por ejemplo, 3 éxitos en 5 repeticiones

También podría expresarlo así:

$$\binom{n}{a} \times P^a \times (1-P)^{n-a}$$

Esa es la formula de la distribución Binomial.



$$\frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{120}{6 \times 2} = \frac{120}{12} = 10$$

$$10 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 10 \times \frac{1}{27} \times \frac{4}{9} = \frac{40}{243}$$

A partir de la esperanza y la varianza de Bernoulli puedo encontrar la esperanza y la varianza de la distribución binomial:

Esperanza:

$$\begin{aligned} & \text{Variables Aleatorias de Bernoulli} \\ & E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n) = E(nX) = n \times E(X) \\ & E(X \rightarrow Be(P)) = P \quad \Rightarrow \quad E(X \rightarrow Bi) = n \times P \end{aligned}$$

Varianza:

$$\begin{aligned} VAR(X \sim Bi) &= VAR(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \dots + X_n) \\ &= VAR(X_1) + VAR(X_2) + VAR(X_3) + VAR(X_4) + \dots + VAR(X_n) \\ &VAR(X \sim Bi) = n \times VAR(X) = n \times P \times Q \end{aligned}$$

Distribución hipergeométrica

La distribución hipergeométrica es una repetición de **n experimentos de Bernoulli**. Estos experimentos van a tener características completamente contrarias a las que requerían los experimentos realizados en una distribución binomial: se van a realizar sobre una **población finita (N)**, los elementos se evaluarán **sin reposición**, y la **cantidad de repeticiones** sobre la población va a ser **mayor a 0,05** $\frac{n}{N} > 0,05$.

Nótese que, debido a sus características, hablamos de repeticiones de experimentos y no de procesos de Bernoulli.

Que el análisis se realice sobre una población finita, con $\frac{n}{N} > 0,05$, y sin realizar reposición de elementos, significara que las **probabilidades de ocurrencia no se van a mantener constantes**.

Por ejemplo:



En un cumpleaños se puso sobre la mesa un plato con 9 porciones de torta de dos sabores distintos, 5 de ellas eran de chocolate y 4 de frutilla. Como no me podía decidir le pedí a una amiga que me vende los ojos para que de esa forma pudiera elegir una porción al azar.

En un principio las probabilidades de que agarrara una porción de chocolate era de 5/9, así como las probabilidades de que agarrara una porción de frutilla era 4/9.

Resulta que la primera porción, elegida al azar, fue de chocolate. Como la torta estaba muy rica decidí volver a realizar este experimento pero, teniendo en cuenta que una de las porciones de chocolate ya me la comí en el experimento anterior, las probabilidades ahora van a ser distintas:



Ahora solo quedan 8 porciones de las cuales 4 son de chocolates y 4 de frutilla. Por lo tanto la probabilidad de que agarre una porción de chocolate va a ser igual a $4/8$ y la probabilidad de que agarre una porción de frutilla también será $4/8$.

Como podemos observar las probabilidades cambiaron: a esto nos referimos al decir que **las probabilidades no se mantienen constantes**.



Formalización:

$$P(X = x \mid N, M, n) = \frac{\binom{N-M}{n-x} \times \binom{M}{x}}{\binom{N}{n}}$$

M : Cantidad de éxitos conocidos de la población (algunos libros lo nombran con T o S)

N : Población

n : Cantidad de repeticiones sin reposición de elementos. (Por lo tanto nunca van a poder ser mayor que el tamaño de la población)

X : Variable Aleatoria Hipergeométrica

x : Valor puede tomar la variable aleatoria



Como puede verse en el recuadro, para calcular la probabilidad vamos a utilizar una construcción de números combinatorios:

$$P(X = x) = \frac{\binom{s}{x} \binom{N-s}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{S!}{x! (S-x)!} \times \frac{(N-S)!}{(n-x)! (N-S-n+x)!}}{\frac{N!}{n! (N-n)!}}$$



¡A no entrar en Pánico!

Explicaremos parte por parte lo que esta formula significa:

En un primer lugar podemos diferenciar con dos colores todo lo que sea poblacional (marcado con rojo) de todo lo que sea muestral (marcado con azul).

$$P(X = x) = \frac{\overbrace{\binom{S}{x}}^{\text{Poblacional}} \overbrace{\binom{N-S}{n-x}}^{\text{Muestral}}}{\overbrace{\binom{N}{n}}^{\text{Poblacional}}}$$

Por otro lado podemos analizar que es lo que representa cada numero combinatorio, cada paréntesis:

Recordando lo que significa S y x podemos observar que acá vamos a poner todo lo que sea éxito.

Si tanto a la población como a la muestra le restamos la cantidad de éxitos lo que nos va a quedar es la cantidad de fracasos. Entonces, acá vamos a poner todo lo que sea fracaso.

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Cantidad de elementos poblacionales y muestrales

Lo que hacemos posteriormente es desarrollar matemáticamente esta fórmula, pero su significado sigue siendo el mismo, analicemos primero el numerador:

Es la cantidad de formas distintas en que pueden seleccionarse x éxitos en la muestra de un total de S éxitos contenidos en la población

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\frac{S!}{x! (S-x)!} \times \frac{(N-S)!}{(n-x)! (N-S-n+x)!}}{\frac{N!}{n! (N-n)!}}$$

Es la cantidad de formas distintas en que pueden seleccionarse n-x fracasos en la muestra de un total de N - S fracasos contenidos en la población

En cuanto al denominador:

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{S!}{x! (S-x)!} \times \frac{(N-S)!}{(n-x)! (N-S-n+x)!}$$

Es el numero total de muestras de tamaño n que pueden obtenerse en una población de tamaño N

Realicemos un ejemplo para entenderlo mejor:

Una empresa recibe un envío de 20 artículos. Como es caro inspeccionarlos todos, tiene la política de comprobar una muestra aleatoria de 6 artículos de ese envío y, si no hay mas de 1 articulo defectuoso en la muestra, no comprueba el resto. ¿Cuál es la probabilidad de que un envío de 5 artículos defectuosos no se someta a una comprobación adicional?

Primero identifiquemos los datos que me da el enunciado:

Por un lado, la totalidad de artículos que la empresa recibe en el envío es 20, por lo tanto esa va a ser mi población.

N = 20

Por otro lado, la empresa declara que de esos 20 artículos solo inspecciona una muestra aleatoria de 6.

n = 6

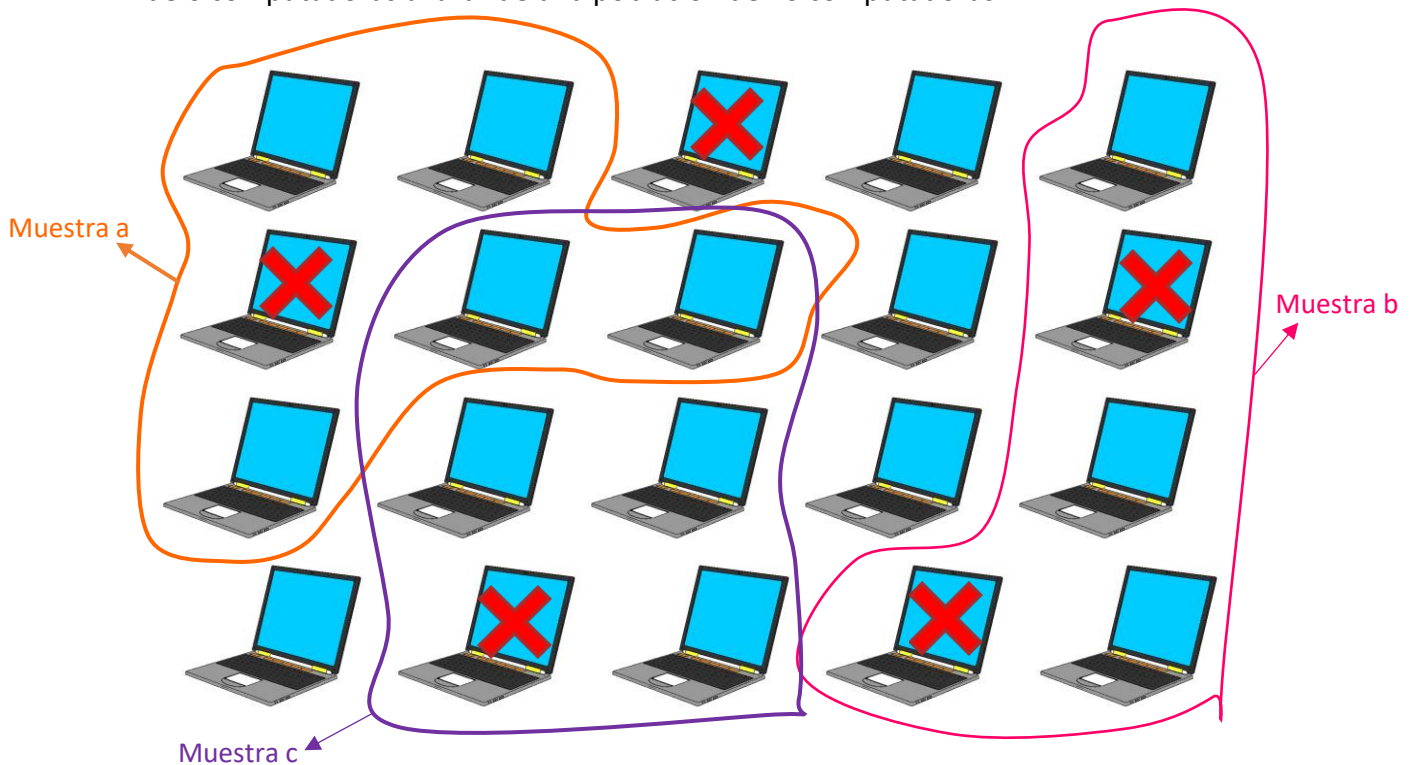
Al realizar el control de calidad, lo que la empresa esta buscando es poder identificar a los artículos defectuosos, por lo tanto se “**articulo defectuoso**” con “**éxito**”.

Aclaración: “éxito” y “fracaso” no deben ser vistos como algo bueno o algo malo, sino como una simple asignación de la variable aleatoria para poder operar matemáticamente y aplicarle medidas de resumen a variables que en un principio eran cualitativas. Es por esto, que si bien intuitivamente podríamos pensar que se le asignaría “fracaso” a un articulo defectuoso porque es una “mala noticia”, le asignaremos “éxito” porque a la empresa no le interesa identificar a los artículos no defectuosos, sino a aquellos que si lo están, para no aceptarlos cuando envían la compra.

Además, el enunciado también me dice que en uno de los envíos de 20 artículos se sabe que 5 son defectuosos, es decir, que son 5 la cantidad de éxitos conocidos de esa población de 20.

S = 5

Ahora bien, supongamos que estos artículos del que habla el enunciado son computadoras. Para realizar el control de calidad esta empresa va a tomar 1 muestra de 6 computadoras al azar de una población de 20 computadoras:



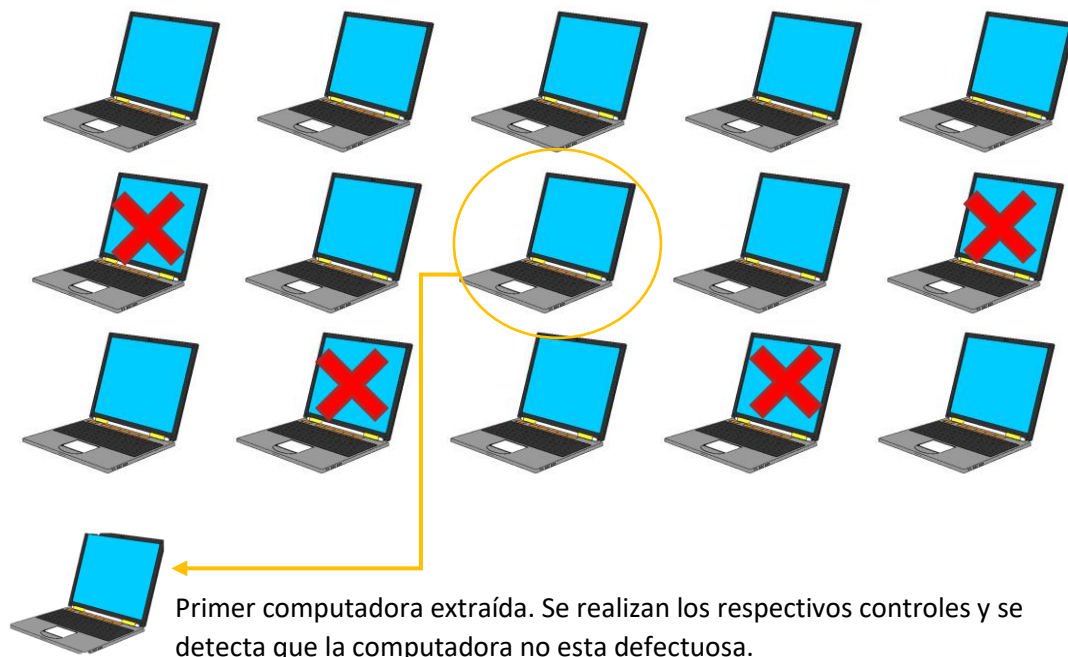
(Las cruces indican las computadoras con defectos que, en realidad no conocemos cuales son)

La muestra a, b y c son ejemplos de las muchas posibilidades de conformación de una muestra hay, dado el tamaño poblacional y el tamaño muestral. Dependiendo cual sea la muestra tomada puede ocurrir que en la misma haya 0, 1, 2, 3, 4 o hasta 5 computadoras defectuosas.

Ya sea que la empresa extrae las 6 computadoras al mismo tiempo, o las va extrayendo una a una no va a cambiar a nuestro análisis en si, pero nosotros vamos a extraer una a una para poder ver que va ocurriendo paso a paso.

En un principio, la probabilidad de que extraiga una computadora defectuosa de la totalidad de 20 computadoras (Población), es decir, la probabilidad de éxito va a ser $5/20$. Mientras que la probabilidad de que extraiga una computadora no defectuosa de la población, en otras palabras, la probabilidad de fracaso va a ser $15/20$.

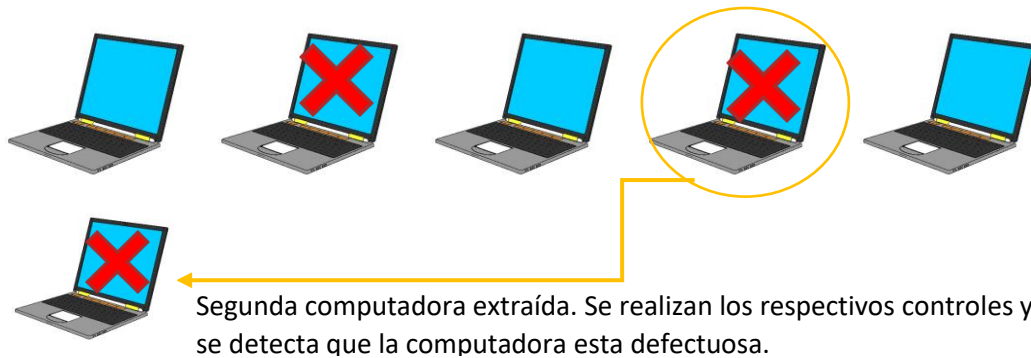




Como dijimos, en la distribución hipergeométrica realizamos el análisis sobre una población finita y **sin reposición de elementos**, lo que significa que no volveremos a meter la computadora analizada dentro de la población nuevamente, por lo cual nuestra población ahora se verá reducida a 19 computadoras. Si nos ponemos a pensar, esto tiene sentido en este tipo de análisis, ya que si repusiéramos la computadora en la población correríamos el riesgo de realizar el control de calidad dos veces sobre el mismo artículo.

No solo debemos tener en cuenta que la población disminuye, sino que también se debe tener en cuenta que la computadora extraída anteriormente fue no defectuosa, por lo tanto solo nos quedaran 19 computadoras, de las cuales 14 no están defectuosas y 5 si. A raíz de esto nuestras probabilidades van a cambiar: La probabilidad de extraer una computadora defectuosa va a ser $5/19$ mientras que la probabilidad de extraer una computadora no defectuosa será $14/19$.





En correlación con lo que paso al extraerse la primer computadora las probabilidades van a volver cambiar antes de realizar la próxima extracción: solo 4, del total de 18 computadoras que quedan, son defectuosas, mientras que 14 son no defectuosas. Entonces mi probabilidad de éxito va a ser $4/18$ mientras que mi probabilidad de fracaso será $14/18$.

Este mismo procedimiento se va a repetir 4 veces mas, para extraer las 6 computadoras que completaran la muestra sometida al control de calidad:

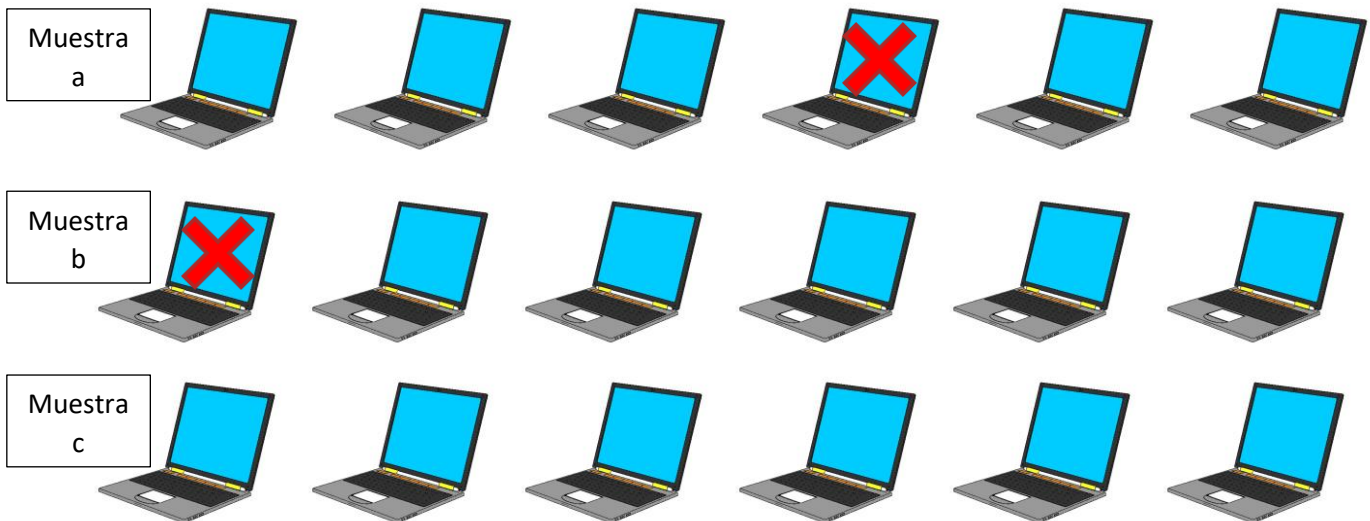


Una vez extraídas y analizadas las 6 computadoras una posible muestra podría ser:



Tal y como decía el enunciado: si no hay mas de 1 artículo defectuoso en la muestra, no se comprueba el resto. Por lo tanto en este caso, con esta muestra extraída al azar, la empresa no analizaría el resto de las computadoras, pero ¡cuidado!, esta **no es la única muestra posible** que cumple las condiciones señaladas para que no se analicen el resto de los artículos.

Ejemplos de otras posibles muestras:



Cuando la consigna nos pregunta “¿Cuál es la probabilidad de que un envío de 5 artículos defectuosos no se someta a una comprobación adicional?” Nos está preguntando sobre **todas las posibles muestras** en las que haya 0 o 1 computadora defectuosa, eso es lo que calculamos con la construcción de números combinatorios que vimos.

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Para que no se verifiquen el resto de las computadoras, la muestra debe tener cero éxitos (ósea cero artículos defectuosos) o un solo éxito (un solo artículo defectuoso), por lo tanto necesitamos conocer:

$$\left. \begin{array}{l} P(X=0) \\ P(X=1) \end{array} \right\} P(\text{envío aceptado}) = P(X=0) + P(X=1)$$

Recordando que en nuestro ejemplo $S = 5$, $N = 20$ y $n = 6$ resolvemos el ejercicio reemplazando:

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{0} \binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{\frac{5!}{0! (5-0)!} \times \frac{(20-5)!}{(6-0)! (20-5-6+0)!}}{\frac{20!}{6! (20-6)!}} = 0,129$$

$$P(X = x) = \frac{\binom{S}{x} \binom{N-S}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{15}{6}}{\binom{20}{6}} = \frac{5!}{1! (5-1)!} \times \frac{(20-5)!}{(6-1)! (20-5-6+1)!} = 0,387$$

$$P(\text{Envío aceptado}) = 0,129 + 0,387 = 0,516$$

La probabilidad de que no se siga comprobando el envío de 20 artículos es 0,516.

Esta tasa de error es alta, e indica que es necesario mejorar el proceso.

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson, también denominada la “ley de casos raros”, la utilizaremos cada vez que se tenga un **espacio continuo de tiempo o un cuerpo denso**.

Se puede utilizar la distribución de Poisson para determinar la probabilidad de que ocurra un determinado numero de eventos en dicho lapso de tiempo o en algún punto de dicho cuerpo denso, como podría ser una superficie. La distribución de Poisson también son repeticiones de eventos de Bernoulli independientes entre si.

El único parámetro que se necesita determinar en Poisson es el numero promedio de eventos ocurridos en dicho lapso de tiempo o en la dimensión de dicho cuerpo.

Formalización:

Parámetro: λ . Es el numero promedio de eventos ocurridos en un lapso de tiempo

$$P(X = x | \lambda) = \frac{\lambda^x \times e^{-\lambda}}{x!}$$

Por convención $0! = 1$



¡Importante!

Poisson supone que existe proporcionalidad de ocurrencia de eventos en distintos espacios temporales.

Por ejemplo, si en un local de ropa entran 20 clientes por hora, voy a suponer que en media hora entran 10.

Si bien Poisson generalmente es utilizado en casos en los que se tiene espacios continuos de tiempo, un ejemplo en el que aplicáramos Poisson sobre una superficie podría ser una extensión de cañería muy grande, de la que se quiere conocer cual es la probabilidad de que se encuentren puntos de fuga.

Varianza y Esperanza de Poisson:

$$E(X \sim Po) = \lambda$$

$$VAR(X \sim Po) = \lambda$$

Ejemplo:

Un departamento de reparación de maquinaria recibe un promedio de 10 solicitudes de servicio por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en media hora (seleccionada al azar) se reciban exactamente 3 solicitudes?

$$P(X = 3 | \lambda = 5) = \frac{5^3 \times e^{-5}}{3!} = \frac{5^3 \times e^{-5}}{6} = \frac{1}{6} \times 125 \times \frac{1}{e^5} = 0,1404$$

10 en una hora son
5 en media hora

Hasta este momento estuvimos calculando **probabilidades puntuales**, que solo pueden ser calculadas cuando trabajamos con **variables aleatorias discretas**.

Ahora le prestaremos especial atención a las **Variables Aleatorias Continuas**.



Distribución Normal

La distribución normal puede ser utilizada con **variables aleatorias continuas**.

Función de densidad de la distribución normal:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{para } -\infty < x < +\infty$$



(No hay forma analítica de integrar esa fórmula)

Formalización:

Si una variable aleatoria sigue una distribución normal van a haber dos parámetros que van a definir el comportamiento de esa distribución:

- 1) Su media (μ)
- 2) Su desvío estándar (σ)

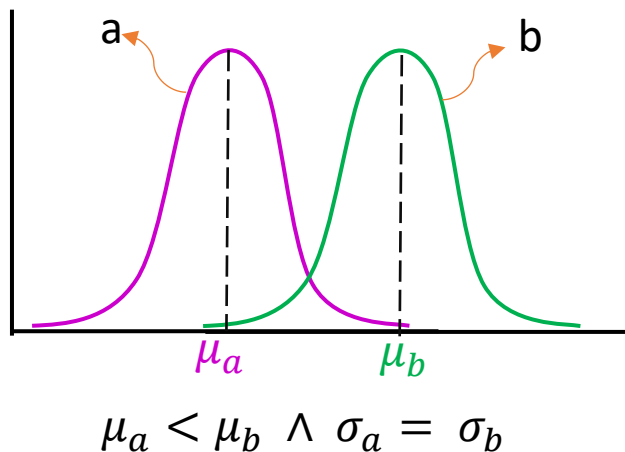
$$X \sim N(\mu; \sigma)$$



Esos parámetros me indican dos cosas:

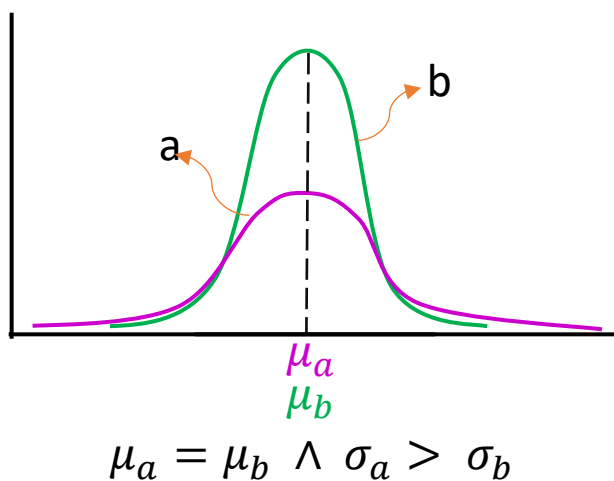
- 1) Cual es la forma que tiene la distribución normal (me lo indica el desvío)
- 2) Cual es el centro que tiene la distribución normal (me lo indica la media)

Ejemplos:



Si cambia la media se va a generar un desplazamiento de la distribución.

Este ejemplo se trata de dos distribuciones distintas, que tienen el mismo desvío, pero distinta media.



Si cambia el desvío se genera un cambio en la forma de la distribución.

Este ejemplo se trata de dos distribuciones distintas, que tienen la misma media, pero distinto desvío.

- Si el desvío es muy grande voy a tener muy poca acumulación centrada con respecto a la media, entonces voy a tener que trabajar con intervalos más largos, más grandes.
- Si por lo contrario el desvío es chico, la acumulación de probabilidad va a requerir intervalos más cortos.
- Sin importar el tamaño del desvío, si voy desde el límite inferior del dominio hasta el límite superior del dominio, **siempre acumulo 1**.
- Varianza de una distribución Normal: $VAR(X) = E(X - \mu)^2 = \sigma^2$

Función de distribución acumulada de la distribución normal:

A la hora de analizar la función de distribución acumulada de la distribución normal debemos preguntarnos como tenemos que hacer para saber cual es la probabilidad de que una determinada variable que sigue una distribución normal acumule, por ejemplo, un 60% o 40% de probabilidad.

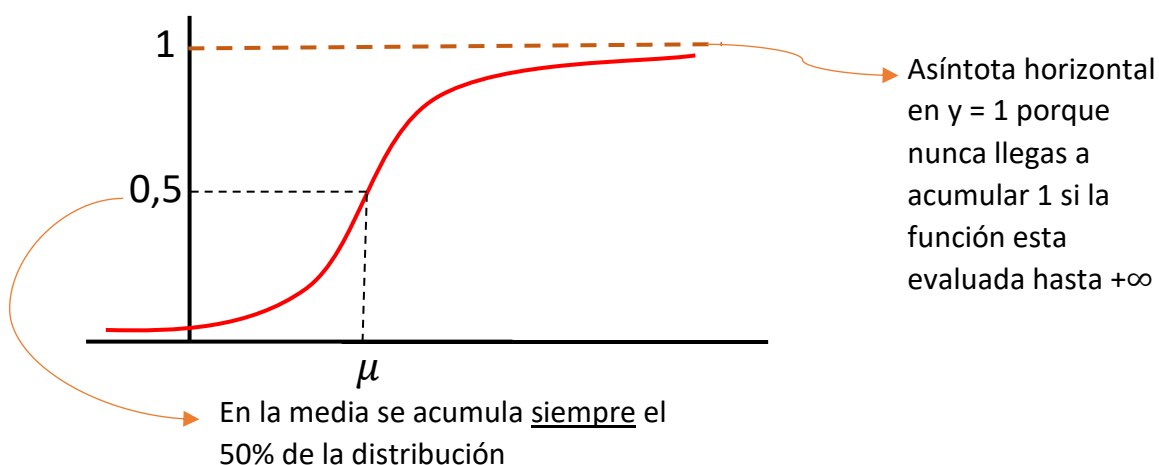
Para obtener eso voy a tener que integrar la función de densidad vista mas arriba:

$$X \sim N(\mu; \sigma) \Rightarrow P(X \leq b) = \int_{-\infty}^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= F(X \leq b)$$

Esta va a ser la función de acumulación hasta un determinado valor de x.

La forma de la función de densidad, tal como la vimos, es de una campana, mientras que la forma de la función de acumulación es la siguiente:

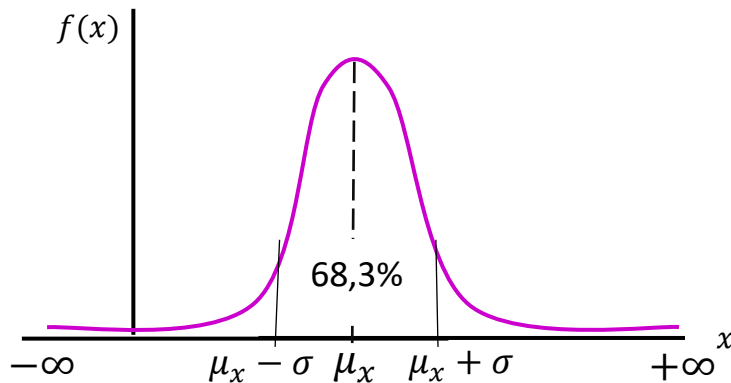


En este grafico la función de acumulación en $-\infty$ acumula 0, en $+\infty$ acumula 1 y en μ acumula 0,5.

Propiedades de la distribución normal:

Pasan bajo la curva de cualquier distribución normal sin importar la media o el desvío que tengan:

Propiedad de 1 desvío:



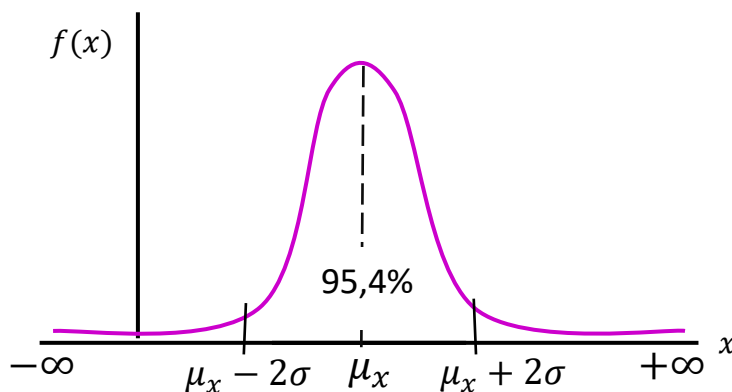
Lo que me está indicando el grafico es que siempre entre $\mu_x - \sigma$ (como limite inferior) y $\mu_x + \sigma$ (como límite superior) se va a acumular el 68,3% de la distribución, para cualquier media y cualquier desvío (siempre y cuando se trate de una distribución normal).

Por ejemplo:

$$X \sim N(\mu = 50 ; \sigma = 3)$$

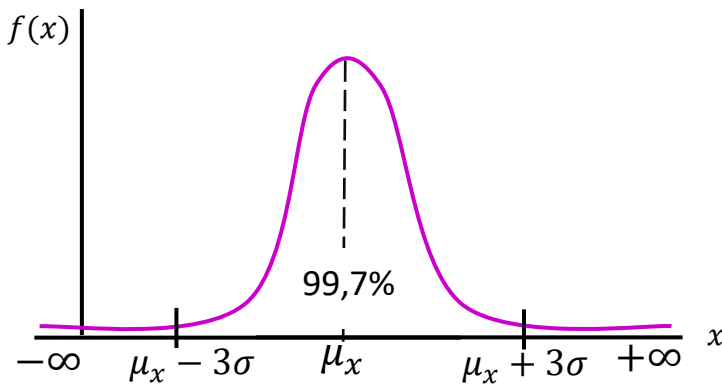
$$F(x) = \int_{47}^{53} f(x) = 0,683$$

Propiedad de 2 desvíos:



Sin importar el valor de la media y del desvío, si sigue una distribución normal, entre la media y dos desvíos para la izquierda y para la derecha se acumulará el 95,4%

Propiedad de 3 desvíos:



Por ejemplo:

$$X \sim N(\mu = 50 ; \sigma = 3)$$

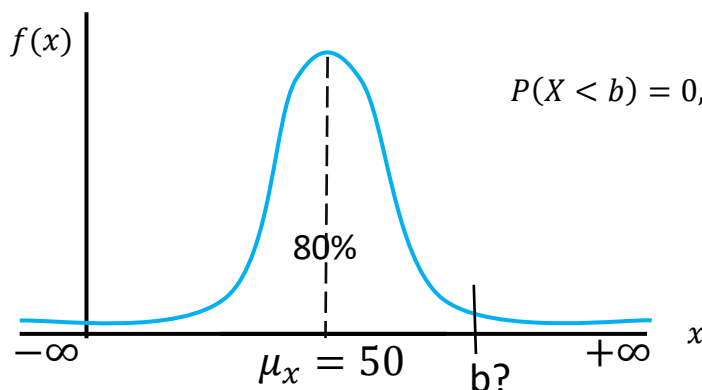
$$F(x) = \int_{41}^{59} f(x) = 99,7\%$$

Problemas inversos de tabla

Tenemos un problema inverso de tabla cuando conozco cuanto se acumula entre los límites, pero no el valor de uno de ellos.

Por ejemplo:

Suponemos que tengo la información de que una variable sigue una distribución normal con una media igual a 50 y un desvío igual a 3 y yo quiero saber cual es el valor tal que acumula por ejemplo un 80% de la probabilidad.



$$X \sim N(\mu = 50 ; \sigma = 3)$$

$$P(X < b) = 0,80$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^b f(x) dx = 0,80$$