

DEMOSTRACION MATEMÁTICA

Distribución de Bernoulli

Evalúamos la función de Bernoulli en $x = 0$ y en $x = 1$

- $P(0) = P^0(1 - P)^{1-0} = 1(1 - P) = 1 - P = P(x = 0)$
- $P(1) = P^1(1 - P)^{1-1} = P1 = P = P(x = 1)$

Tal y como dijimos antes: $P + (1-P)=1$

Ahora, utilizando la función generatriz de momentos vista anteriormente, vamos a calcular la esperanza y la varianza de Bernoulli. Partimos entonces de la función generatriz de momentos (FGM):

$$\theta_x(t) = E(e^{xt})$$

La distribución de Bernoulli es una distribución de probabilidad **discreta**, por lo tanto la esperanza de “e” la calcularemos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Sigma e^{xt} \times P(x) &= e^{0t} \times P(0) + e^{1t} \times P(1) \\ &= e^{0t} \times P^0(1 - P)^{1-0} + e^{1t} \times P^1(1 - P)^{1-1}\end{aligned}$$

Reemplace en $P(0)$ y en $P(1)$ la función de Bernoulli valuada en 0 y en 1 respectivamente.

$$\begin{aligned}e^{0t} \times (1 - P) + e^{1t} \times P \\ (1 - P) + e^{tp}\end{aligned}$$

FGM para una
variable aleatoria
Bernoulli.

Una vez obtenida la función generatriz de momentos para una variable aleatoria Bernoulli la derivamos (M_1) para poder encontrar la media y la varianza. Luego evaluamos la derivada en 0 y obtenemos que $e^0 P = P$.

$$M_K = \frac{\partial^k \theta_x(t)}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

$$\theta_x(t) = (1 - P) + e^t P$$

$$M_1 = \frac{\partial'(1 - P) + e^t P}{\partial t} = 0 + e^t P \Big|_{t=0}$$

Ahora procederemos a encontrar el Momento Absoluto de orden 2 ya que, como vimos más arriba, lo necesitamos para la conformación de la varianza:

$$M_2 = \frac{\partial''(1 - P) + e^t P}{\partial t} =$$

$$M_2 = \frac{\partial[(\partial 1 - P) + e^t P]}{\partial t} =$$

$$M_2 = \frac{\partial e^t P}{\partial t} = e^t P \Big|_{t=0} = P$$

Una vez obtenidos M1 y M2 reemplazamos esos datos en las conclusiones que obtuvimos más arriba sobre la varianza y la esperanza:

$$E(X \rightarrow Be(P)) = M_1 = P$$

$$VAR(X \rightarrow Be(P)) = M_2 - M_1^2 = P - P^2 = P(1 - P)$$