

Al estar trabajando con probabilidades, en lugar de multiplicar las observaciones con respecto a la media al cuadrado por la frecuencia relativa simple, las multiplicaremos por su probabilidad de ocurrencia:

$$VAR(x) = \sum_{i=1}^N (x_i - \mu_x)^2 \times P(x)$$

Desde aquí vamos a descomponer el binomio al cuadrado, entonces:

$$VAR(x) = \sum (x^2 - 2x\mu_x - \mu_x^2) \times P(x)$$

Ahora realizamos distributiva para poder separar los términos en distintos sumandos:

$$VAR(x) = \sum (x^2 - 2x\mu_x - \mu_x^2) \times P(x)$$

$$VAR(x) = \underbrace{\sum x^2 P(x)}_1 - \underbrace{\sum 2x\mu_x P(x)}_2 + \underbrace{\sum \mu_x^2 P(x)}_3$$

1) Lo que tenemos en este primer término es un momento absoluto de orden 2 (M_2)

2) Tanto 2 como μ_x son constantes que las vamos a sacar por fuera de la sumatoria

$$2\mu_x \sum xP(x) = 2\mu_x \mu_x = 2\mu_x^2$$

Momentos absoluto de orden uno, que es igual a la media

Momento absoluto de orden uno al cuadrado ($2M_1^2$)

3) En un principio volvemos a repetir el mismo paso sacando la constante (μ_x) por fuera de la sumatoria.

$$\mu_x^2 \sum P(x) = \mu_x^2$$

Por ley de cierre la suma de las probabilidades es igual a 1.

Momento absoluto de orden 1 al cuadrado (M_1^2)

Por último, reemplazamos en nuestra ecuación original lo que obtuvimos como conclusión en cada término y obtenemos:

$$VAR(x) = M_2 - 2M_1^2 + M_1^2$$

$$VAR(x) = M_2 - M_1^2$$

Conclusiones:

$$E(x)\mu_x = M_1$$

$$VAR(x) = \sigma^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = M_2 - M_1^2$$